

# 教 科 研 究 数 学

no. 199



数楽アート PEGASUS II (馬の鞍 II)

## CONTENTS

【羅針盤】育成すべき資質・能力が中心課題 ● 高階玲治……1

【特集】授業にひと工夫  
図形領域の教材・指導について ● 渡邊慶子……2

こんな教材・こんな教具 (16) 幾何板をもっと使おう ● 原田康宏……6

【授業実践例】数学的な思考力・表現力が高まる授業をめざして ● 鈴木直……8

【授業実践例】関わりを持ち、お互いに高め合う生徒の育成 ● 清和玄詞……11

【授業実践例】活用する力を育てる関数指導 ● 近藤留美……14

数楽ランド (27) 砂漠を越えろ！……17

【連載】数学の目で見えるシリーズ④ 約数を見つける九九ってないのかな 続編 ● 町田彰一郎……18

リレーエッセイ (31) アートと数学の融合 ● HIROKO……20

インフォメーション……21

# 電子黒板に最適！

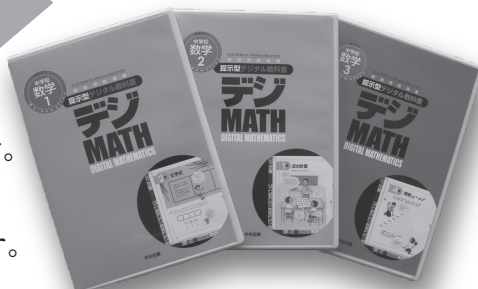
平成24年度版 中学校数学1～3

教師用指導書 提示型デジタル教科書

## デジMATH

デジ MATH は、指導者用デジタル教科書です。

- ◆教科書の紙面を拡大して投影できます。
- ◆教科書の上で書き込みなどの作業ができます。
- ◆教科書の図を動かすことができます。
- ◆電卓，コンパス，分度器など数学ツールを使うことができます。



各学年DVD-ROM(Win, Mac対応) 1枚, 各学年取扱説明書1冊

定価：各学年 **18,000** 円(税抜)

## 次期学習指導要領改訂の動き

周知のように次期学習指導要領改訂の動きが始まっている。文科省は検討会議を重ねてきたが、3月に「論点整理」が示された。

今回の改訂は、何よりも「育成すべき資質・能力」を明らかにし、それに基づいて各教科等の目標・内容や評価を定めたいとしている。これまでは、「生きる力」が理念として掲げられていたが、各教科等の固有性が強く、理念と実践の乖離がみられた。そこで各教科等が共通に目指す「育成すべき資質・能力」を明確化した学習指導要領の構造にしたいとしている。

ただし、「育成すべき資質・能力」は誰もが共通にイメージ化できることが望ましいが、例えば「主体性・自律性に関わる力」「対人関係能力」「課題解決力」「学びに向かう力」「情報活用能力」「グローバル化に対

応する力」「持続可能な社会づくりに関わる実践力」など極めて多義的であって、これらをどう統合するか、興味深い。

さらに極めて重要なことは、各教科等を横断する、「認知的・社会的・情意的な汎用的スキル」を重視していることである。

「汎用」とは、1つのことを学んだ結果を他の分野にも幅広く活用することであって、そのスキルを子どもに身につけたいとする。例えば、問題解決力、論理的思考力、コミュニケーション力、チームワーク力などである。

ただ、各教科等にはそれぞれ本質的な目標や内容があり、また固有の知識・技能スキルがある。その意味で、「育成すべき資質・能力」や「汎用的スキル」と各教科等の固有の

目標・内容をどう統合し、次期学習指導要領にどう具体化するか、極めて注目されることである。

## 「資質・能力」をどう身に付けるか

一方、国立教育政策研究所は、「教育課程の編成に関する基礎的研究」を数年前から行っていて「21世紀型能力」を提唱しているが、今回「資質・能力」育成についての報告書7をまとめている。

報告書は、海外も含めてこれまでの研究成

果をまとめたものであるが、日常の実践に生かす方策も示されていて興味深い。

例えば、各教科等の概念の深い理解や本質的な把握が、協調的な学習も含めて「知識や技能を活用できることにつながる」として、「知識・技能X」を「学習活動Y」を通して学ぶことで「資質・能力Z」を身に付ける、という構造で教育目

標を表現できないか、としている。それは「何がわかった」から「何かができるようになった」という生徒の主体の形成でもある。

また、内外の教育研究の成果から、授業づくりや学校の教育課程編成に役立つ方策として興味深い7つの視点を提示している。

①子供は有意義な文脈で学ぶ。②子供は自分の考えを持っている。③子供は対話で考えを深められる。④考えるためには材料が必要である。⑤すべ（方略）は必要に応じて使うことができる。⑥学び方は繰り返し振り返って自覚できる。⑦教室や学校に学び合いの文化があると学びやすい。

次期学習指導要領の改訂論議はこれから本格化する。関心を高めたい。

羅\*針\*盤



## 育成すべき資質・能力 が中心課題

高階 玲治

Takashina Reiji

教育創造研究センター所長。  
編著書『新学校経営相談 12  
か月 全6巻』、『見てわかる教  
務担当マニュアル』など多数。



## 図形領域の教材・指導について

—「図形という観念」の意識化を考える—



滋賀大学 渡邊 慶子

## 1. はじめに—「図形」を表現する—



図1

中学校数学科の教員免許状取得を目指す大学生に対して「今まで、図形をどのようにして学んできたか」と毎年問うてみる。すると、その場にいるほとんどの学生が、「図形をかいて考える」や「図形をかいたり作ったりする」、「証明で話題になる」などと応える。続いて、「例えばどのように？三角形については？」と問いかける。それに対して、1人の学生が黒板の前に進み出て、三角形を図1のようにかく。「これが三角形です」といながら学生は席に戻る。このやり取りは、ある日の授業の一コマで、学生たちと私の間ではほとんど毎年成立する。ここで、私は（やはり毎年）、小学校算数科の教科書に「三角形」ということばが最初に出てくる頁を探して次の授業で提出するよう学生たちに宿題を課す。

平林（1994）は、図形とは観念であって実在しないことを、「三角形をかけといわれて正三角形をかいたらなぜいけないのか」を学生たちと考える事例とともに述べている。

＜…算数・数学では、記号の表す実体は、目に見えもしないし、触れもできない観念ですから、記号そのものがその表す実体だと誤解されてしまうことが往々あります。

「数（number）」と、それを表す記号であるところの「数字（numeral）」との区別は、小学校でもしばしば強調されます。たとえば、「32から2をとれば3である」

というのは、記号上の話であり、その表す実体については、「30」です。ところが「図形」については、この区別は余り厳しくなされていません。それで、鉛筆でかいた三角形や紙でつくった三角形を、数学的実在である「三角形の観念」そのものと思いこんでしまうのでしょうか。（pp.142-143）＞

図形という観念は、数のそれとよく似ている。数の観念は、小学校第1学年の教材を通して強調される。数「2」それ自体は、物体・実体として存在しない。リング2個や車2台、トラ2頭や鉛筆2本など、用途も大きさも色も全く違う様々なものの集合を半具体物としての「○」で表せば、共通に「○○」と表せて、その集合を表す性質を多くの国で「2」と記し、日本語で「に」とよむ。リングや車、トラは、低学年の子どもたちの歓声を上げて喜ぶ姿を引き出す小道具ではないことを、教師を目指す多くの学生たちは、この教材を通して得心する。

一方で、図形という観念については、確かに教材として強調しにくい。中学校数学科第2学年「証明」で、図形をことばで表現することを意識した途端に、生徒にとって図形学習は大きく変わってしまい、小学校算数のそれとは「別物」になる。その原因の一つは、「図という記号」を見て考えるだけでは学習が成立しなくなってしまうことにある。「三角形」について、

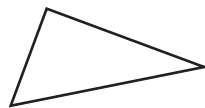


図2

図2のような三角形を示して、「3本の直線  
でかこまれたかたち」と説明されるのは、小  
学校第2学年である。このとき、その子ども  
たちに、この図（図2）は一例であると強調  
しても、なかなか伝わらない。それは、図2  
を小学生に提示したとき、彼らのノートに写  
されたそれは、必ず図2のように描かれてい  
て、例えば図2を

みて図3のように  
描く子どもはほと  
んどいないことで  
確認できる。その  
点では、中学生で

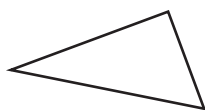


図3

も基本的に同じかもしれない。ただし、中学  
生くらいになると無意識に図形を観念として  
取り扱っていることもある。例えば、中学校  
の数学の授業中、教師は定規を用いて三角形  
を黒板に描くだけでなく、所謂「フリーハン  
ド」で描くこともあるだろう。そのとき、厳  
密にみれば、直線でなく歪みがあったり、角  
が丸みを帯びていたり、「三角形」ではな  
い図が提示される。そして、それを三角形と  
みるよう暗黙的に生徒たちに要求する。それ  
に対して、生徒たちの多くが自分のノートに  
定規を用いて描く。さらに図形の問題を解く  
とき等、生徒自らフリーハンドで図を描き、  
これは「三角形である」などとみなして解答  
する姿も見られる。つまり、私たちが黒板に  
描いて「図形」と言っているものは、正確に  
いえば図形を表した一例としての「図」で  
あって、図形という観念を表す「記号」の役  
割を果たしている。生徒たちは、図形に実体  
を求める姿勢から徐々に離れて、図形を観念  
としてとらえる姿勢へと移行するのである。

図形の学習は、「図形という観念」への意  
識化と、「実体と観念」に対する表現方法や  
様々な誤解とその処理に向き合いながら、進  
められている。それら2つの点について、本  
小論では、例を挙げながら考えたい。先述の  
学生たちが実体と観念を十分に表現できない

ことを踏まえると、「図形を観念としてみな  
す」ことは簡単なことではないといえよう。

## 2. 「図形という観念」と図形学習の理論

ここでは、「図形という観念」は、「今」の  
解釈を、「過去」の解釈に立ち戻って考える  
再帰的かつ発展的な学習によって成り立つこ  
とを述べたい。とはいえ、再帰的で複雑な思  
考過程を介して図形の学習を進めるとよいと  
言っても、やはり学習は「階段をより上へ」  
を志向して進むものである。

我が国の図形領域の指導には、表1で示す  
「ファン・ヒーレの学習水準理論」が多くの  
示唆を与えている。この理論は、考察の「方  
法」であった事柄を考察の「対象」とするこ  
と、即ち「方法の対象化」（平林，1987，  
p.189）という数学的思考の特徴で成り立つ  
とされる。

これは、身の回りの具体物を「しかく」や  
「さんかく」のような形に着目し、色や用途、  
大きさ等を捨象して表現する基礎的な段階  
（第0水準）から始まる。そして、次に、例  
えば「さんかく」について、辺の本数が「3」  
であることや内角の個数が「3」であること  
に着目する。即ち、形を性質によって「三角  
形」と把握する第1水準を経て、次に辺の長  
さや相等性などの性質の関係を「この三角形  
の2本の辺の長さが等しいならば2つの内角  
の大きさも等しい」などの命題によって性質  
を把握する第2水準が設定される。

そして、第3水準のような命題の証明が主

表1 ファン・ヒーレの学習水準理論の図式（平  
林，1987，p.188 ※括弧内は筆者）

| 水<br>準 | 0           | 1    | 2  | 3  | 4  |
|--------|-------------|------|----|----|----|
| 対<br>象 | 身の回り<br>のもの | 図(形) | 性質 | 命題 | 論理 |
| 方<br>法 | 図(形)        | 性質   | 命題 | 論理 |    |

たる課題となる中学校第2学年の学習単元に始まる段階、さらに第4水準のような「論理」を考察しようとする数学研究者の思考の段階まで、非常に広い範囲の学習水準を表す。しかし、それが指導やカリキュラムの構成に反映されているとはいっても、実際の生徒たちの図形に対する考えは単純にステップアップするようなものではない。先述の学生の反応を例に挙げれば、第3水準に到達したと解釈できる学習を、様々な教材を介して既に経験している学生たちが「図形は描ける」と考えている。このことを踏まえると、本当の意味で「形を性質で見ることができているのか（第1水準）」を疑わなくてはならない。彼らは自身の数学的な経験をもって「三角形とは何か」を再び考える必要があるのである。

### 3. 誤解に直面する図形学習

次に、「実体と観念」ということに話題を転じたい。ここでは、空間図形と体積を考える際にしばしば生じる誤解と計算などの数学的な処理を検討する教材「空間図形の模型作成と体積」を例に考えてみる。

「一辺が5cmの正四面体（A）と一辺が10cmの正四面体（B）がある。Bの体積はAの体積の何倍になるか」という体積比についての課題から始まる正多面体の問題を例にしたい。私は実際に、授業で約80名の大学生に出題した。上述の問題に対して、学生の多くは、まず数学的な知識を総動員して、計算に没頭したり体積比の関係から「8倍」と即答したりした。しかし、次に彼らは、空間図形を示す図（見取図など）を描き始めたり、「実物」を製作する必要性を口にし始めた。そこで、それぞれの正四面体を実際に製作して、体積の関係を調べてみようということになった。事実、中学校第3学年の学習内容で示されているように「一辺が5cmの正四面体の体積：一辺が10cmの正四面体の体積」は、相似比が1：2の相似な立体なの

で、体積比は $1^3:2^3$ で「1：8」になる。しかし、一辺が5cmの正四面体が、一辺が10cmの正四面体に8個入るわけではない。ちなみに、計算によって「Bの体積はAの体積の8倍である」ことを算出したり即答したりした学生も含め、多くの学生は、Aの立体がBに8個入ると考えたようであった。その証拠に模型（Aを8個とBを1つ。ただし、Bは1面分を切り取る。）を作り終えると、首をかしげて悩んでいた。BにはAがせいぜい5個入る程度である。この時点で、上述した「8倍」という計算結果を、「誤りだったのではないか」と考えて検算し始めたり、「正四面体」や「体積」などのキーワードからWeb検索しようとしたりする学生が多数となった。このような状況は、図形学習ではよく起こる。つまり、「見た目」や「量や大きさに対する感覚」に、ある種の「数学的な処理の結果」の正しさは、揺らぐのである。実際、Bの正四面体を正多面体で満たそうとするならば、Aの正四面体4つと一辺が5cmの正八面体1つが必要となる（図4）。このことは、立体Bに各頂点を合わせるように立体Aを4つ入れて、中にできた空間に着目すると、その空間が一辺5cmの正三角形8枚に囲まれていることを観察して確認できる。

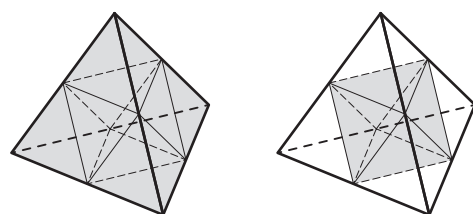


図4 正四面体の中の正八面体

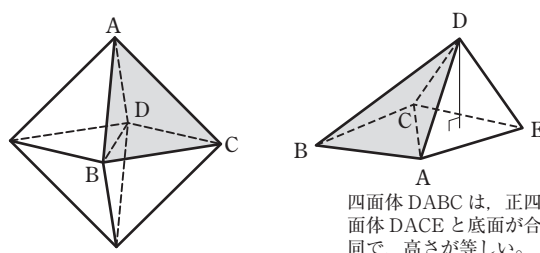


図5 正四面体と正八面体の体積

表2 正多面体の辺や面、頂点と面の形の関係について

|           | 辺の数 | 面の数 | 頂点の数 | 面の形(面の1つの角度) | 1つの頂点に<br>集まる面の数 |
|-----------|-----|-----|------|--------------|------------------|
| 正四面体      | 6   | 4   | 4    | 正三角形(60°)    | 3                |
| 正六面体(立方体) | 12  | 6   | 8    | 正方形(90°)     | 3                |
| 正八面体      | 12  | 8   | 6    | 正三角形(60°)    | 4                |
| 正十二面体     | 30  | 12  | 20   | 正五角形(108°)   | 3                |
| 正二十面体     | 30  | 20  | 12   | 正三角形(60°)    | 5                |

その後、一辺5cmの正八面体1つ分の体積はAの正四面体4つ分の体積に等しいことを具体的な模型によって納得する必要がある。学生の多くがそのことを簡単には信じていなかった。それを納得したのは、一辺5cmの正八面体の四分の1を表す四面体を作成した後のことである(図5)。その後、この教材は、正六面体(立方体)、正十二面体、そして正二十面体の模型作成を経て、「なぜ正多面体は5種類しかないのか」を説明することへと展開する。この内容は、高等学校数学Aにも登場するが、それぞれの正多面体について、立体を構成する面の形、1つの頂点に集まる面の数とそれによってできる1つの頂点の周りに集まる角度(参考、表2)を用いることで、中学校数学科の教材になり得る。正多面体が構成できる「条件」は、「面の形を正 $n$ 角形とすると、 $n$ は3以上でかつ、1つの頂点の周りに面は3枚以上集まり、さらに、そのときにできる1つの頂点の周りに集まる角度は360°より小さくなくてはならない」ことを具体的な模型作りから導き出す。

この事例から、図形領域の学習において、「見た目」や「量や大きさに対する感覚」によって生じる誤解(体積比はそのものの形の個数と一致するという誤解)があるということと、それが計算する活動を介して解消されない場合、「数学的な処理(計算など)の結果」の正しさは具体物を考えた途端に、揺らぐことが分かる。すなわち、「目に見える」状態にすると、頭の中で組み立てた「自分の数学」に基づく結果は簡単に疑いの対象と

なってしまうのである。

#### 4. おわりに—図形を「ことば」にする—

図形の学習といえば、小学校算数科では、図を描くなど具体的な作業が多くて「分かり易い」が、中学校数学科からその先の学習内容は、証明などことばや式で説明することばかりで分からなくなったという感想が多く聞かれる。しかし、実際のところ「分かり易い」というのは、観念が表すほんの一例を見て納得していたにすぎない。図形をことばにすることを意識できる中学生は、算数で学習した「三角形」がどのような図で例示されているのかを探究できるし、それが「ことば」で必ず表現されてきたことを小学生のときとは違う意識でよむこともできる。さらに、例えば証明学習で登場する「三角形の合同条件」も、誰でも同じ三角形が描ける条件、つまり「三角形を決定する条件」と置換し、一意の図形をことばで表せる。そのような「ことば」が如何に通用するかを、教室の仲間と共に確かめ、図形という観念が得心されていく。図形学習は、一段一段階段を単純にのぼっていくというよりはむしろ一段上を見ては今いる所を確認し、新たな解釈を携えて過去にいた所に戻りながら少しずつ上へのぼっていくように、進められるべきであろう。

#### 引用・参考文献

- 平林一榮(1987)『数学教育の活動主義的展開』東洋館出版  
平林一榮(1994)『算数指導が楽しくなる小学校教師の数学体験』黎明書房

# 幾何板をもっと使おう

## —四角形をつくる幾何板ゲーム—

### 1 はじめに

数・式の学習では、多くの場合「練習」または「ドリル」と称される学習が有効に機能し、多くの「正解」の体験を通して学習の理解を深めることができ、正解が簡易な表現で示されやすい。

これに対して図形の学習では、「角度」や「長さ」などの問題を測ったり、計算したりすることで好感的に学習を進めることができる。しかし、いったん証明学習に入ると遅々として進まない「証明」に退屈さを感じているように見える。作図学習を証明学習の前段として位置づけることが、証明学習の理解を促進するといわれるが、遙か昔に学習した内容を想い出すことはなかなか困難なことである。

証明学習でもいくつかの基本的な技能が必要である。たとえば命題の中で仮定と結論を分けること、問題を図に表し、何を証明するのか、どの三角形が合同（相似）なのか、どんな図形の性質を使うのか使えるのか、などである。これは、証明問題を解決していく基本的な姿勢であり方略であるが、このことは知識や方針であっていわゆる公式ではない。

### 2 証明を楽しく学習する

幾何板（図1、図2：等間隔に釘を打ったもの）を使った学習では、様々な問題を作ったり解いたりするのに大変有効で、興味深い。例えば、ピックの定理（多角形の面積測定など）もこの幾何板を使って、数えたり考えたりすると効果的である。

この幾何板ゲームは、中学2年の証明学習のまとめとして実施した。四角形の性質と平行四辺形の性質を相互的に使ったり、理解するのに有効である。基本の図形から出発し、

サイコロの目を使ってその条件に当てはまるように四角形をつくっていくのである。

条件文は、四角形に関わる性質や特徴を多面的に表現している。



図1 生徒用幾何板 図2 提示用幾何板

### 3 指導の実際

学習シートを配布し、ルール説明をしながら進める。幾何板とサイコロは2人で1個使う。スコア表に得点を記録する。

なお、四角形を次々と変形するための表現は、表1のように21種類の条件である。サイコロは2個なら1回投げ、1個なら2回続けるが、「1」、「4」の目も「4」、「1」の目も【41】として表1を使う。

表1 出る目と作り出す図形を指定する文

| 出る目  | 図形の性質や定義            | 作られる四角形など |
|------|---------------------|-----------|
| 【11】 | 4つの内角はすべて直角         | 長方形       |
| 【21】 | 向かい合ったちょうど1組の辺が等しい  |           |
| 【22】 | 四角形は等しい辺も平行な辺も持たない  |           |
| 【31】 | 四角形は線対称な図形ではない      | *         |
| 【32】 | 向かい合った2組の辺がそれぞれ平行   | 平行四辺形     |
| 【33】 | 向かい合ったちょうど1組の内角が等しい |           |
| 【41】 | 向かい合ったちょうど1組の辺が平行   | 台形        |
| 【42】 | ちょうど1本の対角線に関して対称な図形 | 31の逆      |
| 【43】 | ちょうど1つの内角が90度より大きい  |           |
| 【44】 | ちょうど1つの内角が直角        |           |
| 【51】 | 向かい合った辺は2組とも平行でない   |           |
| 【52】 | 向かい合った2組の内角がそれぞれ等しい | 平行四辺形     |
| 【53】 | 4辺がどの2つも等しくない       | 63の逆      |
| 【54】 | ちょうど1組の隣り合う2辺が等しい   |           |
| 【55】 | ちょうど2つの内角が直角        |           |
| 【61】 | 隣り合う2辺が2組とも等しい      | たこ形       |
| 【62】 | 1角が180度より大きい        | ブーメラン形    |
| 【63】 | 4辺がすべて等しい           | ひし形       |
| 【64】 | 4つの内角がすべて異なる        |           |
| 【65】 | 対角線が面積を2等分する        |           |
| 【66】 | 向かい合った2組の辺がそれぞれ等しい  | 平行四辺形     |

## ＜ゲームの進め方＞

- ①基本のスタート四角形（平行四辺形）を輪ゴムで作る。（図3）
- ②サイコロを振って出た目（2数の組み合わせ）に該当する条件文を読み，その四角形に変形する。その際できるだけ少ない回数で変形し，輪ゴムを釘にひっかける。変形は指1本ですることが原則である。（図4）
- ③1回（1つの点のみ動かす）で条件文に適する図ができた場合は4点，2回で3点，3回で2点，4回で1点というように得点化する（図5）。四角形は4点でつくるので最大4回の変形作業である。変形できない，または思いつかなくなった場合，負けとなる。

図3 スタート状態  
（平行四辺形）

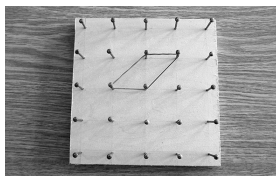
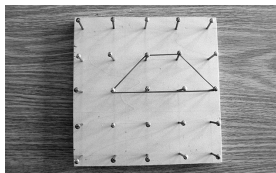


図4 指1本で輪  
ゴムを動かす



図5 変形した四角  
形【41】の条件で  
変形



このゲームでは，条件によって指示された図形（四角形）に変形していくとき，授業で使っている図形の定義や性質の意味の理解を問い直している。しかし，ゲームとしては，2人のプレーヤー（生徒）が互いに「これはどういう意味？」，「この動かし方で（四角形は）いいかな？」とコミュニケーションをとりながら，もし2人で解決できない場合，さらに近くの生徒に聞くなど交流ができることが特色的な学習活動である。1人または2人で1個使えるよう個数を用意したい。

この表1の中には四角形（平行四辺形，長

方形，ひし形，正方形，台形，たこ形など）の定義や性質，平行四辺形になるための条件や対角線に関する性質など様々ある。

教科書で扱われる証明問題よりも表現が多様であるため，使い慣れない，つまり，あまり証明問題には出現しない表現も若干ある。前述の表1の21種類の性質のうち，生徒たち（38人中）が「表現が難しい」，「分かりにくい」と感じたベスト5は表2である。

表2 表現が難しい，わかりにくい，図形が作りにくい文

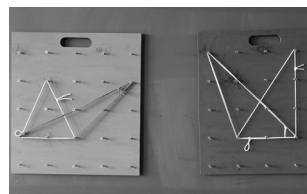
| 出た目  | 図形の性質・定義            | 人数 |
|------|---------------------|----|
| 【42】 | ちょうど1本の対角線に関して対称な図形 | 26 |
| 【63】 | 4辺がどの2つも等しくない       | 17 |
| 【62】 | 1角が180度より大きい        | 16 |
| 【61】 | 四角形は線対称な図形ではない      | 13 |
| 【65】 | 対角線が面積を2等分する        | 10 |

この結果をみると，日頃の授業で教師がよく使っている図形の性質の言い回しなどが，生徒の理解を十分支援しているか，少々疑わしい。四角形の包含関係などの説明には十分留意したい。

## 4 成果と課題

このゲームに使われる図形の性質に，三角形の合同条件などは入っていない。その意味では，四角形の図形の性質の表現を学習するということが主眼となろう。表現が複雑で難しいときはゲームが止まってしまう。しかし，証明学習をねらいとしたゲームは数少ない。この状況の中で，操作学習を通して証明を学べるという幾何板ゲームの利点は大いに利用すべきである。なお，その他にも幾何板の活用例としては，平行線の性質（三角形を四角形に等積変形する，図6）などがある。さらに改良し，実践を進めたい。

図6 平行線の性質  
（三角形）



＜参考，引用文献＞ 石橋康徳（平成13年）『数と図形』pp.21-25，溪水社

## 数学的な思考力・表現力が高まる授業をめざして

—台形の面積公式を利用した文字式指導を通して—

静岡大学教育学部附属島田中学校 鈴木 直

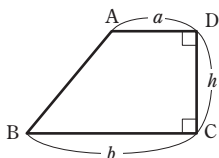
### 1. はじめに

学習指導要領解説には、「第1学年では、数量の関係や法則などを、文字を用いて式に表したり、式の意味を読み取ったり、文字を用いた式の計算をしたりして、文字を用いることのよさについて学習する。」と書かれている。また、指導に当たっては、小学校における学習の状況を十分配慮し、文字のもつ一般性について丁寧に取り扱い、文字に対する抵抗感を和らげながら理解することができるようにすることが求められている。そこで、本校の研究テーマでもある思考力・表現力を育てる授業とからめ、以下のような授業を実施した。

### 2. 学習課題について

#### 【学習課題】

ADとBCが平行で  
角Dと角Cが $90^\circ$   
の台形の面積を工夫して求めよう。



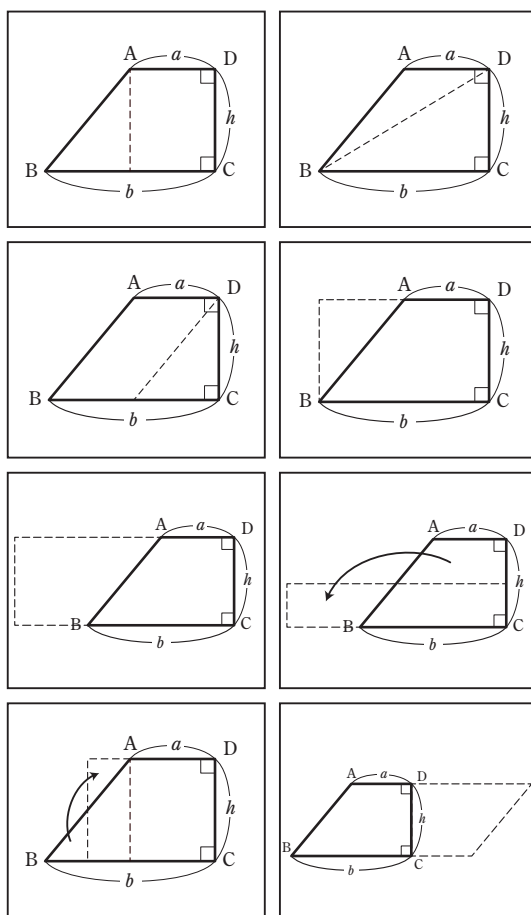
「図のような台形の面積を工夫して求めてみよう」という学習課題を提示した。小学校の授業でふれている内容でもあるため、生徒は多様な考え方で面積を求めることができた。しかし、小学校とは違い、辺の長さが文字で表されているため、文字式の計算で苦勞し、なかなか文字式のきまりに従った表し方にたどりつかない生徒もいた。また、計算ができないため、自分の考えが正しいのか不安になったり、答えが分かっているのに、図の解釈を間違えて考えたりしている生徒も見られた。

### 3. 授業の実際

#### (1) 個人追究

～考え方を文字式で表す～

追究用紙を配り、考え方を図に記入させた。また、その考え方が分かるように、文字を使った式で表すようにした。考え方によっては、文字式の計算が2年生の範囲になるものもあり、計算が分からないものは、そのまま残すように声をかけた。多様な考え方ができる課題なので、意欲的に取り組むことができた。生徒が考えた方法は以下のようなものである。

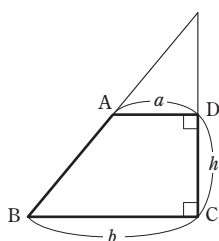


## (2) 小集団追究

### ～考え方の検証と公式への収束～

小集団では、それぞれの考え方を説明させた。その中で、疑問に思ったことは質問したり、途中で分からなくなってしまったものは、小集団で話し合ったりするように促した。多くの小集団で、活発な意見交換が行われた。この要因はやはり自分の考えがもてているという自信から生まれるのだと思う。ある小集団での議論が深まった例を1つ紹介する。(文字式の計算はやらす、考え方の説明の場面)

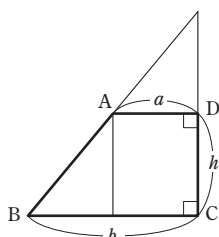
S1:  $\angle B$  が  $45^\circ$  になるので、図1のように大きい三角形から小さい三角形をひけば面積が求められる。



(図1)

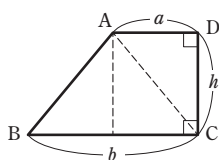
S2: ちょっとまって。本当に  $\angle B$  は  $45^\circ$  なの。

S3: 私も  $\angle B$  は  $45^\circ$  だと思って、図2のような考え方をやってみたけど。



(図2)

S2: なんかおかしいと思う。だってね、もし  $45^\circ$  ならこの台形は、3つの同じ三角形(図3)に分けられるということになるよね。



(図3)

すべての台形がこのようなになるとは限らないからおかしいよ。

S1: それじゃ  $\angle B$  は何度になるの。

S2: 何度かわからない設定なんだよ。

このような小集団活動から、検証する力が付いてくるのだと思う。すべての考え方を受

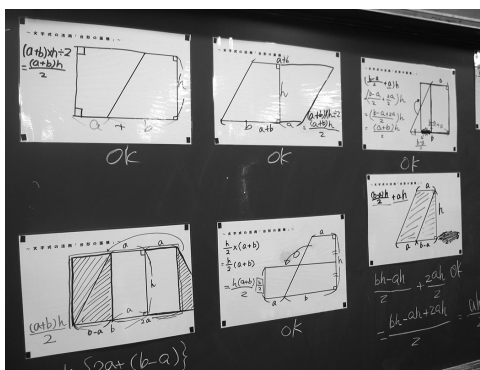
け入れるのではなく、疑問に思ったことは声に出してみることで、意見を言った方も質問された方も、数学的な見方や考え方が育つことにつながると考える。

## (3) 一斉追究

### ～台形の面積公式からみえること～

#### ①すべての考え方が1つの文字式に収束

一斉追究では、まず多様な意見を黒板に掲示し、文字を使って表した式がすべて同じ文字式になるのかを、確認した。どの考え方も  $S = \frac{(a+b)h}{2}$  になることが分かり、生徒も自分の考え方が正しいことで安心したようである。



文字式の確認をしたときの板書

#### ②多様な考えを分類する

次に、もう一度じっくり黒板を眺め、これらを考え方に着目して分類してみようと発問した。生徒は、自分なりの根拠で分類することができた。

##### (分類例)

- ・ 三角形、四角形に分ける
- ・ ある一部分を移動させる
- ・ 同じ台形を付けたす
- ・ 三角形2つ
- ・ 長方形にして考える
- ・ 平行四辺形にして考える

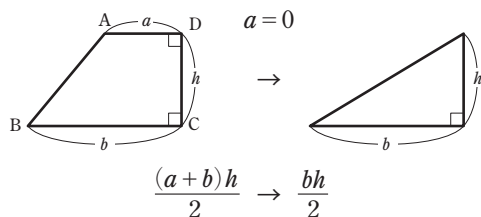
この課題だけでなく、多様な考えを「全ていいですね。」と終わらせることもあるが、多様な考えを分類し、共通点を見つけること

で、新たな性質に気付いたり、考え方のつながりが見えたりすると、授業内容が深まっていくのではないだろうか。授業者がどのような授業展開を考え、まとめていくのが大切になってくる。

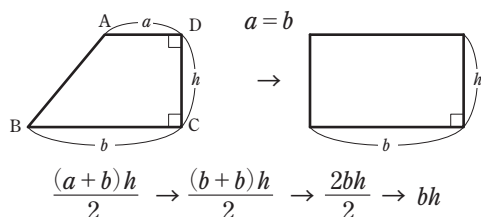
### ③台形の面積公式から深める

授業の終盤では、文字を使った台形の公式に着目し、 $S = \frac{(a+b)h}{2}$  の  $a$  の値と  $b$  の値が同じ ( $a=b$ ) ならば、この公式はどうなるのか考えさせた。計算すると長方形（平行四辺形）の公式になることに気づき、今までただの公式でしかなかったものが、三角形や長方形、正方形の公式とつながることを知り、台形の面積公式が他の図形の公式を一般化したものであることに驚いていた。ちょっとした数学的な見方を提示することで、数学の美しさやおもしろさに気付かせてあげることができる。

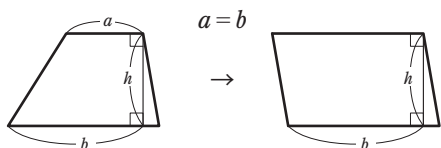
#### ア) 台形→三角形（直角三角形）



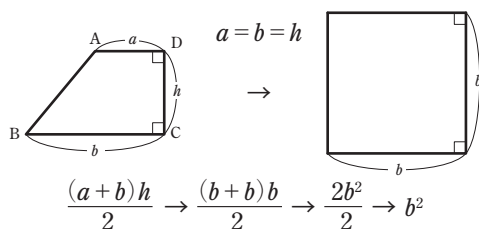
#### イ) 台形→長方形



もとの台形を今回提示したような図形ではなく、直角のない台形ならば、イ) は長方形ではなく、平行四辺形となることが分かる。



#### ウ) 台形→正方形



## 4. 授業の考察

個人→小集団→一斉の形態で授業を行い、それぞれの活動の場でどのようなねらいがあるのか生徒に伝えてきた。

個人追究では1つの課題に対して、多様な方法で考えること。小集団では自分の考えを相手に理解してもらうためにどう説明するのか。そして一斉では、今までの活動をまとめていく中で、数学的な考え方の深まりが感じられる（気付く）ことができること。

このようなことを単元を通して授業者がどう仕組んでいくのが大切であると考え。そして、多様な考えをどのようにまとめていくのかは、まだまだ研究の余地がある。授業者が生徒に何を感じてほしいのかを考えたいうえで授業を展開することが、数学的に考えることのおもしろさを感じさせたり、思考力・表現力を高めるためには必要なことであると考え。

### ～授業後の生徒の感想～

台形の面積公式の文字の1つを他の数と同じにすると、平行四辺形や長方形や三角形の面積公式になることを初めて知った。

言葉で表しているとわからなかったけど、文字式で表すとわかるし、活用できるので文字式はいいなあと思った。

### 〔参考文献〕

國宗 進 (1999) 『台形の面積の扱いの改善』  
日本数学教育学会誌 第81巻 第4号 別刷

## 関わりを持ち、お互いに高め合う生徒の育成

鶴岡市立鶴岡第三中学校 清 和 玄 詞

### 1. はじめに

本校では学校研究として、これまで「表現力」をつけるために各教科や学校生活全般で継続的に指導を続けてきた。その中で表現力をより高めるためには「関わり合いが不可欠である」という反省も出された。そこで、「多様な考えを持つ生徒同士が関わることで、『論理的に表現する力』が身につく、関わり合いの中で個々の考えを練り合い、共によい考えをつくり出していくことができる」と考えた。さらに、関わり合い、お互いを認め合う中で「自己有用感」を持ち、その結果、学習や諸活動へ意欲的に参加できるようになることも期待できると考え、この主題を設定した。まだ1年目の研究ではあるが、数学科では「関わり合い」として授業の中での「教え合い」を盛り込んだ授業展開をすることになっている。

### 2. 研究の目標と仮説

目標①目標を持ち、進んで学ぶ生徒の育成

②思いやりがあり、つくす生徒の育成

③強い意志でやり抜く生徒の育成

仮説①数学の授業を通じて、人間関係づくりを意識しながら意図的に「関わり合い」の場を設定し実践していくことで、より良い関わり方を身につけ「関わり合う力」が向上していくであろう。

②数学の授業を通じて身につけた「関わり合う力」をもとに、関わり合いの場を計画的・継続的に実践していくことで「論理的な考え方」や「表現力」が身につく、学力向上へつながるであろう。

### 3. 研究内容

言語活動を積極的に取り入れるために、関わり合いをベースにした授業展開を計画する。積極的な関わり合いといっても、「隣の人と話し合いなさい」と指示を出したところで、生徒がすぐに言語を多用して交流するかといえばそうではない。交流するためにはコミュニケーションをとらざるを得ない場面が必要である。実際の授業では、コミュニケーションを活かした授業を展開した。

「関わり合いの場」として特に「教え合い」に以下のようなルールを設けた。

#### ①教える側として

- ・ 答えを安易に教えるのではない。
- ・ どこがわからないのかを「聞く」。
- ・ 解き方をどう教えればいいのかを「考える」。
- ・ わかりやすい言葉を選んで「伝える」。

#### ②教えられる側として

- ・ 答えを安易に聞かない。
- ・ 教える側の人の話を一生懸命に「聞く」。
- ・ ある程度まで予測できたら「考える」。
- ・ わからないところを「伝える」。

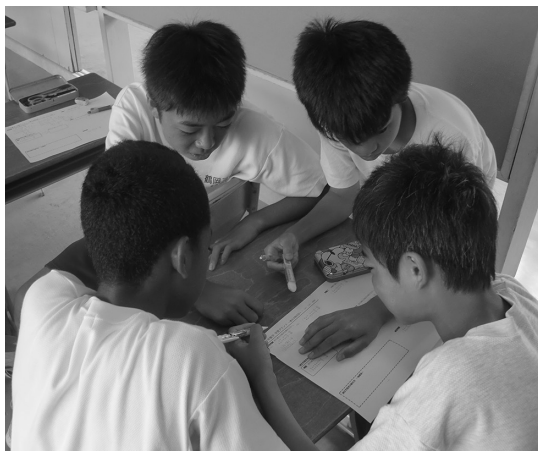
「聞く・考える・伝える」ことが関わり合うための最大のポイントであると考えた。

また、「絶対に一人にしない」という声かけを行った。授業を理解することは、各教科の一番の目標である。しかし、教科担任として教室に入っている以上、クラスの実態も把握しなければならない。そのために4月の初発指導で「教え合いのメリット」を伝え、軽

いエンカウンターなどをしてから本格的に教え合いの授業を進めていった。

#### 4①. 授業実践1～普段の授業で～

前時の復習問題を、全員を立たせてから教え合いを行うことによって、誰にでも気軽に「教える・教えられる」雰囲気を意図的に設定した。生徒には、「まだ解いている人はいないか」、「考え方は間違っていないか」、「他の考え方はないか」の3つを意識させた。



授業での指名方法は、意図的に「誰かに教えてもらった人」に発表してもらうことにした（または関わった人を挙げる）。教えた生徒の「自己有用感」と発表した生徒の「自信」を育てるというねらいである。

また、ランダムに指名することにより、いつでも答えられるよう周囲の人と関わらざるをえない状況もつくった（上記、\_\_\_\_\_部分のような展開）。

教え合いの時間をとった後の発表の仕方を、以下のように定めた。

- ・「〇〇君から教えてもらったのですが…」
- ・「同じ考えだったのですが、〇〇君は△△というやり方でした」
- ・「(答えを出してから) 〇〇さんも同じ考えでした」

生徒たちは同じ意見を探したり、違う意見を求めたりと躍起になっていた。

この「教え合い」は、毎時間行っているわ

けではない。主に練習問題中心の授業（技能や見方・考え方の問題を多く解く場面）で活用している。

生徒同士の教え合いがある程度定着した2学期、指名しても生徒が答えられない場面があった。しかし次の生徒に指名せず、「なんとかしよう」と時間を確保したところ、すぐに周囲の生徒が教え始め、直後に「〇〇さんが△△というやり方で求めている、答えは□です。私も納得しました。」という答えが出て、解決ができた。やはり、答えざるをえない状況を作り出すことも必要だと感じた授業であった。

また、席替え時などでは、関わりが生まれやすいグループ（班）を、学級担任と相談しながら編成した。

#### 4②. 成果と課題

成果として、生徒の教え合う姿があり、授業で気軽に質問する雰囲気をつくり出すことができた。また、低位の生徒の授業への「安心感」があった。

課題として、これまでの授業を通して培った「関わり合い」を学校生活に活かすことができるようにすること、関わりが特定の人とならないようにグループの多様化を図ること、さらに、答えをすぐに求める生徒が出ないように、解く時間の確保にも努める必要がある。



## 5①. 授業実践2～教材を使って～

中学2年生の2学期に学習する「図形の性質の調べ方」である。

ここは、三角形の合同条件や図形の定義、また筋道を立てて証明する手法を獲得する単元である。「証明」がここから始まるため、丁寧に進めていかななくてはならない。

三角形の合同条件を学習した後、それらを用いて証明の流れを理解するのは、速い生徒、遅い生徒様々である。

そこで、「合同条件のカードゲーム」を作成した。内容とルールは以下の通りである。

### ●用意

$\triangle ABC$  と  $\triangle DEF$  があり、

- ①  $AB=DE$       ④  $\angle ABC = \angle DEF$
  - ②  $BC=EF$       ⑤  $\angle BAC = \angle EDF$
  - ③  $AC=DF$       ⑥  $\angle ACB = \angle DFE$
  - ⑦ 3組の辺がそれぞれ等しい
  - ⑧ 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい
  - ⑨ 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい
- の9種類のカードを①～⑥は4枚ずつ、⑦～⑨は2枚ずつ用意する。

### ●ルール

- (ア) 3人グループを作る。(6人班で、残りの3人はアドバイザー役)
- (イ) カードを全員に4枚ずつ配る。
- (ウ) 順番を決める。
- (エ) 1番目の人は、山札から1枚をとり、いらない手札を捨てる。(合同条件に合うようにするのがポイント)
- (オ) 2番目の人、3番目の人、…と続ける。
- (カ) 合同条件に合うように組み合わせたら、「ストップ」と言い、全員に手札を見せる。
- (キ) グループであがった人の手札を確認する。

例えば、カード①②③⑦を組み合わせれば

あがり。また、カード①②④⑧を組み合わせればあがりとなる。他に数通りのあがり方がある。



## 5②. 成果と課題

カードゲームをしている中では、「あと何が等しければ合同になるか」の声があった。また、ペアでゲームをしたため、教え合いの雰囲気が良好であった。低位の生徒は、ワークシートが手助けとなって、グループでのゲームに参加できた。課題としては、カードの枚数に偏りがあったことや、ルールの習熟が必要であると感じたことである。

さらに、直角三角形の学習後、

- ⑩  $\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$
- ⑪ 斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい
- ⑫ 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい

のカードも加えると、直角三角形の合同条件の理解にも効果が見られた。

応用すれば、「平行四辺形である条件」の学習もできると考え、現在作成中である。



## 活用する力を育てる関数指導

～一次関数の活用の授業改善を通して～

福山市立幸千中学校 近藤 留美

### 1 はじめに

近年、全国学力・学習状況調査の結果など具体的な問題から生徒のつまづきを分析し、課題を明らかにした授業改善を図る取組みが進められている。本校では、2年前より関数指導の改善に重点的に取り組んできた。表、式、グラフの特徴を見付け出す活動や相互に関連付けた学習をすることで、A問題（主に知識に関する問題）では、正答率が向上してきており、成果がみられている。しかし、B問題（主に活用に関する問題）においては、事象の読み取りや記述への苦しさもあり、無解答率も高く、課題が多く残っている。今後も、これまでの指導を振り返り、指導のポイントを明確にした授業改善を行っていく必要がある。

### 2 一次関数の活用

日常の中には関数として捉えられる事象が多くあり、中学校学習指導要領では、「具体的な事象を調べることを通して、一次関数について理解するとともに、関数関係を見いだし表現し考察する能力を養う。」ことが目標として示されている。

そのため、事象を表、式、グラフで表し読み取る活動や、既習事項を使って説明する活動が必要となる。また、これらの活動を充実させながら、関数を活用する意欲と能力を高めていく。

### 3 授業実践

#### (1) 調査結果からみる課題

全国学力・学習状況調査B問題から、次の力が定着していないと整理した。

- 具体的な事象を表やグラフで表し、その特徴を的確に捉えること。
  - 表、式、グラフの特徴を利用して説明すること。
- この調査結果の課題には、次の指導上の課題が大きく影響すると考える。
- 事象を表やグラフに表して考えることの有用性を感じ取らせる活動が十分でない。
  - 考えの理由を、表、式、グラフを利用し、その特徴など既習事項を使った説明の場面を仕組んでいない。

#### (2) 指導改善のポイントの明確化

指導上の課題から、次の2点を指導改善のポイントとした。

##### ポイント1

事象の考察に、表、式、グラフを利用し、そのよさを実感させる。

具体的な事象において、表やグラフを利用して問題解決させることで、表やグラフのよさを感じさせる。また、変化する量は、表やグラフで整理すれば、その様子がわかりやすくなることを確認する。さらに、予測できない数値については、式を利用すればよいことに気付かせ、必要性を感じさせる。

##### ポイント2

表やグラフの特徴を基にして、考えを伝え合う場面を仕組む。

表やグラフの特徴を根拠にして、どんな関数であるかを判断したり、判断理由を説明したりする場面を、単元を通してできるだけ設定していく。説明は一人に限らず、多くの生

徒に同じ内容でも発言させるなど、伝える力を付けていくようにする。表を用いればどのように求められるか、グラフを用いればどのように求められるかを、自分の表現で書かせたり、説明させたりする。

### (3) 授業における工夫点

○「小集団の中で、伝え合う活動」を仕組む。

個人で思考したこと、解決方法などを4人グループで伝え合いを行う。グループの意見はホワイトボードに書かせ整理し、全体にも伝えられるようにする。

○教材を「ユニバーサルデザインの視点」で工夫する。

量の変化をイメージしやすい問題にし、具体物や絵などを使って提示する。2つの量の変化を表で表すことができるように、ワークシートに問題文から必要な数量を抜き出す文を入れるなどの工夫をする。

また、スモールステップで問題に取り組ませることで、すべての生徒ができるという意識をもてるようにする。

### (4) 授業の実際

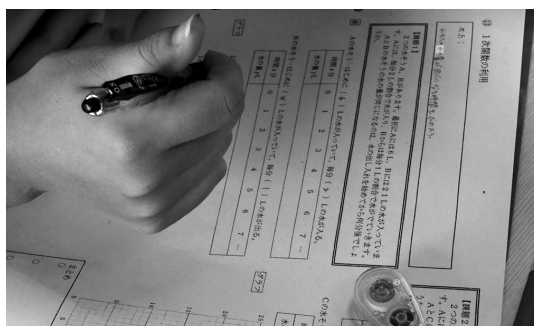
導入の問題提示では、教師が実際に日常で起こった経験からできたものであることを伝え、問題に興味をもたせ、解決してみようという意欲をもつことができるようにした。

〔問題1〕

2つの水槽A、Bがあります。最初にAには6L、Bには21Lの水が入っています。Aには毎分2Lの割合で水が入り、Bからは毎分1Lの割合で水が出て行きます。

AとBの水槽の水の量が同じになるのは、水の出し入れを始めてから何分後でしょうか。

変化の様子がわかるように、表、グラフを利用すればよいことを確認し、ワークシートに表、グラフを書かせる。ワークシートには、「最初○L入っている。1分で○Lふえる、へる。」の文を入れておき、事象を確認して、



表をうめることができるようにした。

【表】

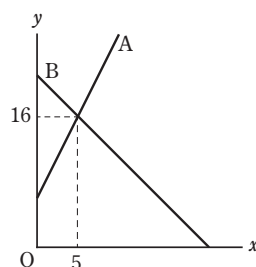
Aの水槽

|         |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $x$ (分) | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | ... |
| $y$ (L) | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | ... |

Bの水槽

|         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $x$ (分) | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | ... |
| $y$ (L) | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | ... |

【グラフ】



水槽の水の量が同じになるのは、出し入れを始めてから何分後かを、表やグラフを利用すればどのように求められるかを、自分の表現で書かせ、説明させるようにした。

〔問題2〕

2つの水槽A、Cがあります。最初にAには6L、Cには25Lの水が入っています。Aには毎分2Lの割合で水が入り、Cからは毎分3Lの割合で水が出て行きます。

AとCの水槽の水の量が同じになるのは、水の出し入れを始めてから何分後でしょうか。

Cの水槽の25L、毎分3Lの数値は、取り組ませる前に口頭で伝えた。問題1を経験しているため、できるという意識がもて、数値も全員が聞き取り、スムーズに表やグラフを

書いて問題に取り組むことができた。

【表】

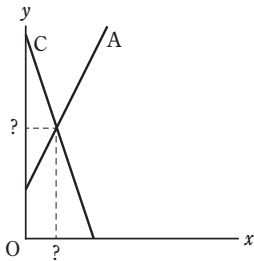
A の水槽

|         |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $x$ (分) | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | ... |
| $y$ (L) | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | ... |

C の水槽

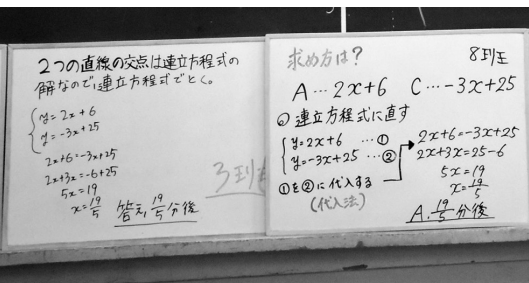
|         |    |    |    |    |    |    |   |   |   |     |
|---------|----|----|----|----|----|----|---|---|---|-----|
| $x$ (分) | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | ... |
| $y$ (L) | 25 | 22 | 19 | 16 | 13 | 10 | 7 | 4 | 1 | ... |

【グラフ】



「あれ？」という声が生徒からあがり、このままでは問題解決できないことに気付いた。そこで、表、グラフでは読み取れないことを確認し、グループで解決方法を考えるように指示した。

4人グループで活動する中で、表の数値を細かくして求めようとする生徒や、グラフの交点を求めるには式が必要であることに気が付き、説明する生徒がでてきた。



グループでホワイトボードにまとめたことを掲示し、発表させた。式の作り方を丁寧に説明し、「グラフの交点」、「連立方程式の解」というキーワードを使って説明することができていた。

【式】

水槽 A  $y = 2x + 6$

水槽 C  $y = -3x + 25$

生徒たちは、表やグラフで求められない場合、式を使って解決する方法がよいと理解し、解決に向けて連立方程式を意欲的に解こうとする姿がみられた。

授業のまとめでは、水槽の水の量が同じになる時間の求め方を、「表では～」、「グラフでは～」、「式では～」と、それぞれ自分のことばでまとめた。

## 4 成果と課題

### (1) 成果

授業後（1週間後）に全国学力・学習状況調査で出題された問題の類似問題を実施したところ、正答率は12ポイント向上し、無解答率は15ポイント減少した。表、式、グラフのいずれかを用いて、問題解決の方法を説明する力と意欲を高めることができた。

### (2) 課題

無解答率は減らすことができたが、誤答・無解答を合わせ、4割近くの生徒が説明の際に表、式、グラフを用いて説明することが十分できていない。

### (3) 今後に向けて

今後も活用する力を高めるために、次の2点に取り組んでいきたい。

1点目は、日常的な事象をより多く取り上げることである。関数では、比例、反比例、一次関数などについて比較をしたり、どんな関数なのかを判断したり、表、式、グラフそれぞれの特徴を使った説明や問題解決の場面の設定を増やしたりすることが必要である。

2点目は、日頃から「なぜ？」の発問を多くし、生徒が思考したり、説明したりする機会を多く仕組むことである。説明においては、説明の型を提示し、数学用語を使わせる、根拠を示しながら言わせるなどを徹底していきたい。

# 砂漠を越えろ！

数楽ランド 27

浩一さんは、ポーター（荷物を運搬してくれる人）を何人が連れて、砂漠を越えようとしています。この砂漠を越えるには6日間かかるのですが、浩一さんもポーターも、1人で4日分の食料と水しか持つことができません。

浩一さんはポーターを何人連れて行けば、この砂漠を越えることができるでしょうか？



<解答>

2人。

1日目：浩一さんとポーター A、B の3人が4日分の食料を持って出発します。

2日目：3人はそれぞれ食料を1日分消費して、残りは3日分ずつです。ポーター B は、食料を1日分ずつ浩一さんとポーター A に渡して、出発地点に帰ります。浩一さんとポーター A は4日分ずつ持ってさらに先へ進みます。

3日目：2人はそれぞれ食料を1日分消費して、残りは3日分ずつです。ポーター A は、食料を1日分浩一さんに渡して、出発地点に帰ります。浩一さんは4日分の食料を持っているので、残りは1人で砂漠を渡ることができます。



## 偶数の約数を探す九九

前回は、約分などに役立つ、<sup>きすう</sup>奇数の約数を見つける九九を考えてみた。

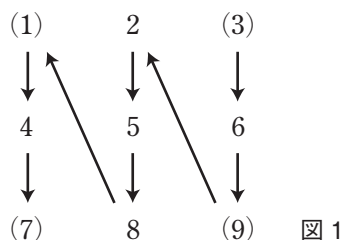


図 1

とかいて、□4 の数なら、約数 8 の場合は、8 を 1 として数えて、

$$3 \text{ 番目}, 8 \times 3 = \boxed{24}$$

$$9 \text{ ならば}, 6 \text{ 番目}, 9 \times 6 = \boxed{54}$$

などとした。

今回はこれを発展させて、<sup>ぐうすう</sup>偶数の約数を見つける方法を考えてみよう。

それには、五角形や星形が便利だ。

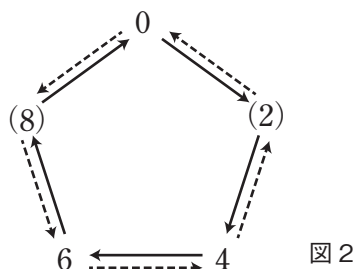


図 2

2 を約数にもつときは、2 を 1 として、正五角形を時計回りに回って何番目に一の位の数があるか探せばよい。

□0 ならば、2 を 1 として 5 番目、10 番目

$$2 \times 5 = 10, 2 \times (5+5) = 2 \times 10 = 20$$

□8 ならば、2 から 4 番目、9 番目

$$2 \times 4 = 8, 2 \times (4+5) = 2 \times 9 = 18$$

8 を約数にもつときは、逆向きに点線にそって回ることになる。

□0 ならば、8 を 1 として 5 番目、10 番目

$$8 \times 5 = 40, 8 \times (5+5) = 8 \times 10 = 80$$

□2 ならば、8 から 4 番目、9 番目

$$8 \times 4 = 32, 8 \times (4+5) = 8 \times 9 = 72$$

□4, □6 も同じ考えでできる。五角形をかいて九九を唱えてみるとよい。

では、4 や 6 を約数にもつときはどうなるのだろう。

星形正五角形上を次のように回ればよい。

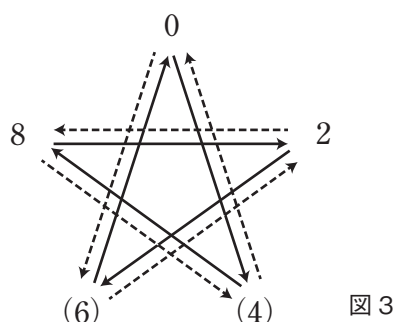


図 3

4 を倍数にもつときは、実線上を、6 を倍数にもつときは、点線上を回る。たとえば、

□0 ならば、4 を 1 として数えて 5 番目、10 番目

$$4 \times 5 = 20, 4 \times (5+5) = 4 \times 10 = 40$$

□6 ならば、4 から 4 番目、9 番目

$$4 \times 4 = 16, 4 \times (4+5) = 4 \times 9 = 36$$

6 を約数にもつときも、点線にそって数えればよい。

□0 ならば、6 を 1 として 5 番目、10 番目、

$$6 \times 5 = 30, 6 \times (5+5) = 6 \times 10 = 60$$

□4 ならば、6 から 4 番目、9 番目

$$6 \times 4 = 24, 6 \times (4+5) = 6 \times 9 = 54$$

もちろん、□2, □8 もできる。

$$276 \div \square = \bigcirc \triangle$$

$\square$ が偶数で、 $\bigcirc$ 、 $\triangle$ に入る1桁<sup>けた</sup>の数を  
見つけなさい。

$\square 6$ になる数は、

$$2 \times 3, 2 \times (3+5) = 2 \times 8,$$

$$4 \times 4, 4 \times (4+5) = 4 \times 9,$$

$$6 \times 1, 6 \times (1+5) = 6 \times 6,$$

$$8 \times 2, 8 \times (2+5) = 8 \times 7$$

ですべてだから、

$$2 \text{ では, } 2 \times 3 = 6$$

$$276 - 6 = 270$$

$27$ は2でわれない。

$$2 \times 8 = 16, 276 - 16 = 260$$

$$26 \div 2 = 13,$$

$$276 \div 2 = 138 \quad \text{だが} 3 \text{ 桁。}$$

$$4 \text{ では, } 4 \times 9 = 36 \text{ のみ,}$$

$$276 \div 4 = 69$$

$$6 \text{ では, } 6 \times 6 = 36 \text{ のみ,}$$

$$276 \div 6 = 46$$

$$8 \text{ では, } 8 \times 2 = 16,$$

$$276 - 16 = 250, 8 \text{ でわれない。}$$

$$8 \times 7 = 56,$$

$$276 - 56 = 220, 8 \text{ でわれない。}$$

したがって、8は約数にならない。

$$\text{答 } \square = 4, \bigcirc = 6, \triangle = 9$$

$$\square = 6, \bigcirc = 4, \triangle = 6$$

このようにして、五角形や星形上に数を配置して九九を唱えると約数を見つけやすくなる。

ここでは、小学校の九九とは異なる方法で、新しい九九の覚え方を示したが、小学校では、「これはこうして、あれはああして。」と、計算のきまりで覚えていたけれど、中学校からは、「それはどうして?」、「こうしたらいけないのかな?」と、自分なりの考え方で試行錯誤<sup>さくご</sup>しながら論理を使って問題解決していくことが求められる。これが算数から数学への切り替えといえるだろう。

## 小学校の四則の見直し

たとえば、 $247 + 986$

小学校では、末位から順に計算していった。しかし、中学校で出てくる文字式では、

$$(2a + 4b + 7) + (9a + 8b + 6)$$

$$\begin{array}{r} 2a + 4b + 7 \\ +) 9a + 8b + 6 \\ \hline 11a + 12b + 13 \end{array}$$

と頭から求めている。

それでは、3桁の計算も頭から計算できないだろうか?

位に注意して頭からやってみると、

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 47} \\ \underline{+ 9 \overline{) 86}} \\ 1113 \\ \underline{12} \\ 1233 \end{array}$$

とすれば、文字式と同じようにできる。

頭から互い違いに2行に渡って書いていけば、どんなに桁数が大きな数でも、そのまま頭から計算できる。

では、かけ算ではどうだろうか?

$$(3a + 5b + 4) \times 2 = 6a + 10b + 8$$

$$(3a^2 + 5a + 4) \times 2 = 6a^2 + 10a + 8$$

頭から順に、2をかけている。

では、 $7896 \times 7$ ではどうだろうか?

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 896} \\ \times \quad 7 \\ \hline 4963 \\ \underline{5642} \\ 55272 \end{array}$$

できる!

小学校の筆算の仕方は歴史上の多くの人たちの知恵の集まりからできているが、それでも中学生になったら、文字式の計算と同じ方法で数の計算を見直してみることにチャレンジするのもよいだろう。

# アートと数学の融合

ポップアップアーティスト HIROKO



株式会社ムーン狗狗提供

みなさん、「ポップアップ」をご存知ですか。それは、飛び出す絵本やカードのように平面を開くと立体が飛び出す仕掛けや、そのような仕掛けをもった作品を言います。私はそれをアートとして制作している「ポップアップアーティスト」です。アートと数学は遠いように思われがちですが、私の作品は数学によって裏付けされたアートなのです。

私がポップアップと出会ったのは小学校中学年の頃。もともと工作をすることが好きだったのですが、作れば作るほど嵩張り、置き場の無いものは捨てられ、悲しい思いをしていました。そんな時、90度を開くと面が立ち上がる市販のポップアップカードに出会い、衝撃を受けたのです。

「これなら捨てられずにとっておける！」

それをきっかけに、まずはその小さなカードをよく観察し、見よう見まねで作ったものが最初の作品です。もちろん、その作品は今でも大切にしています。

それからというもの、独学で仕組みを理解し、ポップアップ作りにのめり込んでいきました。小・中学生の頃は、図形や立体に関する知識が浅く、90度を開く最初の作品の延長線上でした。180度を開くと立体が飛び出すポップアップを作り始めたのは、高校生になってから。授業で三角関数や、複雑な図形の問題をこなしていくうちに、立体を構成している要素やその展開図を理解することで、三次元で立体を把握する力が身についていき、以前には理解が困難だった角柱や角錐等の多面体を作品に取り入れるようになりました。

間もなくして、大学受験に始まり、就職し社会人となってしばらくは、日々の忙しさに、作ることを忘れていました。そんな中、ふと、子供の頃に親しんだポップアップを思い出し、再び作品作りを始めたのです。

「今までにないポップアップを作りたい。」

国内外のポップアップ作品を観察し、同時にペーパークラフトの技術も一から見直しました。その結果、多くのポップアップ絵本は切り貼りの試行錯誤を経て作られていることから、大胆さはあるものの繊細さに欠けることが、一方、設計図を基に作られるポップアップ作品は、精密さがあるものの大胆さに欠け、手法にも限界があることに気付きました。それらを踏まえ、繊細かつ大胆な独自の表現を模索していきました。そこで役に立ったのが数学の知識でした。繊細な作品を作るためには精密な設計が、同時に、大胆で複雑な造形を生み出すには正確な寸法、角度を求める計算が必要でした。長いブランクの中で得ていた大学数学の知識も加わり、自分の思いをより正確に表現できるようになっていきました。同時に作品が評価されるようになり、ポップアップアーティストへと転身しました。

数学は計算や公式だけではなく、三次元でものを捉える力も培えるものなのだと改めて思います。私は特に数学が突出して得意であった訳ではありませんでしたが、ポップアップに数学の知識を加えることで驚くほど可能性を広げることができたと思っています。そして今、それが何よりも自分の強みとなり、精密で繊細な独自の造形表現へ辿り着きました。それは、「木漏れ日」のような光と影を生みだしてくれます。私は作品を通して「安らぎの雰囲気」や「癒しの空間」を多くの方々に届けていきたいと思っています。

百井 紘子（もい ひろこ）◎ 1979年東京生まれ。2003年日本大学大学院理工学研究科建築学専攻修了（工学修士）、経済産業省入省。2007年ポップアップアーティストへ転身。第15回紙わざ大賞 準大賞、第62回全国カレンダー展 全国中小企業団体中央会会長賞などを受賞。著書に『ハンドメイドポップアップの本―世界でひとつ、飛び出すカードの作りかた―』（機情報センター出版局）がある。[http://www.geocities.jp/h\\_pdr/](http://www.geocities.jp/h_pdr/)

## 研究会情報

### 第 66 回広島県算数・数学教育研究（府中）大会

開催日：2014 年 10 月 31 日

会 場：府中市立府中明郷中学校 他

テーマ：21 世紀の算数・数学の学びのデザインを  
求めて

—思考力・判断力・表現力・活用力をはぐ  
くむ算数・数学教育—

### 第 69 回北海道算数数学研究（オホーツク・北見）大会

開催日：2014 年 11 月 6 日，7 日

会 場：北見市芸術文化ホール 他

主 題：「社会に生きる，社会に活かす」算数・数  
学教育の探究

### 第 63 回神奈川県数学教育研究会連合会「小田原大会」

開催日：2014 年 10 月 31 日

会 場：小田原市立酒匂中学校 他

テーマ：『確かな学力を育む算数・数学教育』

—考える楽しさ味わえる，深い学びあい—

### 日本数学教育学会第 47 回秋期研究大会

開催日：2014 年 11 月 8 日，9 日

会 場：熊本大学

※詳細は，各研究会事務局にお問い合わせください。

## 表紙のことば

「数楽アート」は，数学の 2 変数関数を金属加工技術を駆使することにより立体グラフ化した，ステンレス製アート・オブジェです。数十枚の鋼板を職人が一枚一枚手作業で，ときに呼吸を止めながら格子状に組み合わせることにより，数式を「目に見えるアート」として表現しています。

「PEGASUS II」のもとになる数式は「 $z = a(x^2 - y^2)$ 」です。これは，双曲放物面と呼ばれる曲面を表す関数です。「PEGASUS II」を形作るのは，なだらかな弧を描くプレート達。そのひとつに着目し観察すると，きっ

とあなたは興味深い特徴に気がつくことでしょう。そう——プレートはすべて，投げ上げたボールが重力に引かれ落下するさまを示す，「放物線」の軌跡を表しているのです。

株式会社大橋製作所

TEL：03-3744-5351

【数楽アート公式サイト】

<http://sugakuart.com/index.html>

【数楽アート facebook ページ】

<https://www.facebook.com/sugakuart>

## 編集後記

◆今更ではあるが，スマートフォンを持っている人たちが増えている。電車でも，道路でもスマホを片手にしている姿を見かけるが，時代は変わったのだと実感する。かつてはパソコンなど一部の人間しか持てなかったものだが，今では 1 人 1 台の時代である。急速に進化していくことのメリットはもちろんあるのだが，アナログである手紙や書籍にもう一度目を向けたいと最近はしきりに思う。



# ぶら～り 夢の数学散歩

仲田紀夫／著

**本誌の連載が1冊の本になりました！**

数学旅行作家・仲田紀夫先生の11年間の連載が、新たな書き下ろしを加え、1冊の本になりました。

数学史、パズル、現代数学など楽しい話題が満載の1冊です。



## Contents

- 第1章 “万華鏡” から見た数学世界
- 第2章 「数学余話」あれこれ
- 第3章 世界の教科書とその問題挑戦
- 第4章 ナゼ数学を学ぶのか？
- 第5章 『最新数学』をかいま見る
- 補章 最後の一発！パラドクス

- 定価 1,200 円（税抜）
- B5 判 96 ページ
- ISBN978-4-7625-0147-0

**学校図書**

※弊社ホームページ「Web ショップ」でも販売しています。

## 学校図書株式会社

本社 〒114-0001 東京都北区東十条3-10-36 URL: <http://www.gakuto.co.jp>

・業務推進部 e-mail: [suishin@gakuto.co.jp](mailto:suishin@gakuto.co.jp)  
TEL: 03-5843-9433 / FAX: 03-5843-9440

・第二編修部 中学校数学 e-mail: [sugaku@gakuto.co.jp](mailto:sugaku@gakuto.co.jp)  
TEL: 03-5843-9436 / FAX: 03-5843-9441

本 社 営 業 部 〒114-0001 東京都北区東十条3-10-36  
e-mail: [eigyogakuto.co.jp](mailto:eigyogakuto.co.jp)

TEL: 03-5843-9434 / FAX: 03-5843-9440

札 幌 出 張 所 〒063-0804 札幌市西区二十四軒四条1-1-30  
東 北 営 業 所 〒038-0031 青森市三内字玉作5-6  
e-mail: [tohokugakuto.co.jp](mailto:tohokugakuto.co.jp)

TEL: 080-4083-6832 / FAX: 011-616-0202

TEL: 017-782-3195 / FAX: 017-782-1167

北 信 越 営 業 所 〒950-0916 新潟市中央区米山5-1-25  
e-mail: [hokushin@gakuto.jp](mailto:hokushin@gakuto.jp)

TEL: 025-241-2591 / FAX: 025-241-2596

静 岡 営 業 所 〒410-0306 沼津市大塚15  
e-mail: [shizuoka@gakuto.co.jp](mailto:shizuoka@gakuto.co.jp)

TEL: 055-966-1126 / FAX: 055-967-1393

近 畿 営 業 所 〒567-0865 茨木市横江1-7-1  
e-mail: [kinkigakuto.co.jp](mailto:kinkigakuto.co.jp)

TEL: 072-637-7216 / FAX: 072-637-7217

中 国 営 業 所 〒733-0037 広島市西区西観音町1-21-502  
e-mail: [chugoku@gakuto.jp](mailto:chugoku@gakuto.jp)

TEL: 082-232-3341 / FAX: 082-232-3342

四 国 出 張 所 〒790-0811 松山市本町6-11-1-101  
e-mail: [shikokugakuto.jp](mailto:shikokugakuto.jp)

TEL: 089-917-9251 / FAX: 089-917-9253

九 州 営 業 所 〒890-0034 鹿児島市田上3-3-11-202  
e-mail: [kyushugakuto.jp](mailto:kyushugakuto.jp)

TEL: 099-253-9437 / FAX: 099-259-6876

沖 縄 出 張 所 〒901-2126 浦添市宮城4-10-1  
e-mail: [okinawagakuto.jp](mailto:okinawagakuto.jp)

TEL: 098-874-0441 / FAX: 098-874-0441